# Physik I - Schriftliche Sessionsprüfung Winter 2017

Dienstag, 31. Januar 2017, 9:00 – 12:00, HIL G41/HIL G15

Bitte zur Kenntnis nehmen:

- Es befinden sich insgesamt **5** Aufgaben auf **9 SEITEN**.
- Es können insgesamt 60 Punkte erreicht werden. Die Punkte der einzelnen Teile einer Aufgabe sind in eckigen Klammern am rechten Rand ausgewiesen.
- Eine Tabelle mit physikalischen Konstanten befindet sich auf der Rückseite des Deckblattes.
- Sie sind berechtigt 10 Seiten Notizen sowie einen Taschenrechner und ein Wörterbuch bei der Prüfung zu verwenden.
- Bitte schreiben Sie KLAR und DEUTLICH. Falls wir Ihre Handschrift nicht lesen können, können wir leider keine Punkte vergeben.
- Bitte fügen Sie UNTEN IHREN NAMEN ein. Dieses Deckblatt wird am Ende der Prüfung zu Ihren Antworten geheftet.
- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Ihrer abgegebenen Blätter.
- Während der Prüfung steht die Prüfungsaufsicht zur Beantwortung Ihrer Fragen jederzeit zur Verfügung. Zögern Sie daher nicht, bei Unklarheiten Ihre Fragen zu stellen.

| NAME: | VORNAME: | LEGI NR.: |
|---|---|---|
| | | |

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | GESAMT |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | |
| Max | 12 | 11 | 10 | 14 | 13 | 60 |

## Tabelle physikalischer Konstanten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Gravitationskonstante: | $G$ | 6.673 | $\cdot 10^{-11}$ | $\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ |
| Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: | $c$ | 2.998 | $\cdot 10^{8}$ | $\mathrm{m\,s^{-1}}$ |
| Äquatorradius der Erde | $R_A$ | 6.378 | $\cdot 10^{6}$ | m |
| Bahnradius der Erde um die Sonne | $R_E$ | 1.506 | $\cdot 10^{11}$ | m |
| Bahnradius des Mars um die Sonne | $R_M$ | 2.280 | $\cdot 10^{11}$ | m |
| Masse der Sonne | $M_S$ | 1.9884 | $\cdot 10^{30}$ | kg |
| Masse der Erde | $M_E$ | 5.9722 | $\cdot 10^{24}$ | kg |
| Gravitationsbeschleunigung Erde | $g$ | 9.81 | | $\mathrm{m\,s^{-2}}$ |

1. **Wasserrutsche** [ $\sum 12$ ]

In einem Zürcher Freibad wird die in Abbildung 1 gezeigte Babyrutsche betrieben. Nach einer geradlinigen ersten Rutschphase mit Höhe $h = 0.5\,\mathrm{m}$ schliesst sich eine halbkreisförmige Kurve mit Radius $R = 5\,\mathrm{m}$ ohne Gefälle an. Der Querschnitt der Rutschbahn ist ein Kreissegment mit Radius $r = 0.5\,\mathrm{m}$ und halbem Öffnungswinkel $\alpha = 30°$, siehe Abbildung 1 rechts. Dank des in der Rutsche fliessenden Wassers und der Spezialbadehose des Babys kann der Rutschvorgang als reibungsfrei betrachtet werden. Die Masse des Babys betrage $10\,\mathrm{kg}$. Weiterhin soll die endliche Breite der Rutsche für die Berechnung der Zentrifugalkraft, die auf das Baby in seinem Bezugssystem in der Kurve wirkt, vernachlässigt werden.

(a) Der Vater lässt sein Baby zuerst ohne Anschubsen rutschen. Mit welcher Geschwindigkeit $v_\mathrm{K}$ tritt das Baby in die Kurve ein? [1]

(b) In einem zweiten Anlauf gibt der Vater dem Baby zu Beginn auf dem kurzen ebenen Stück vor Eintritt in den abfallenden Teil einen zusätzlichen Schubs, indem er über einen Zeitraum von $\Delta t = 0.2\,\mathrm{s}$ eine konstante Kraft $F = 50\,\mathrm{N}$ auf das Baby ausübt. Welche Geschwindigkeit $v_K$ hat das Baby nun bei Eintritt in die Kurve? [1.5]

(c) Wir betrachten nun die Tangentialbewegung des Babys in der Querschnittsebene der Bahn, beschrieben durch den Auslenkungswinkel $\varphi$ (siehe Abbildung). Welche Kräfte wirken im Bezugssystem des Babys im Kurvenbereich auf das Baby, wenn es mit einer Geschwindigkeit $v_K$ durch die Kurve rutscht? Zeichnen Sie ein entsprechendes Kräftediagramm im Querschnitt. Für welchen Winkel $\varphi_\mathrm{G}$ ergibt sich ein Kräftegleichgewicht? [2.5]

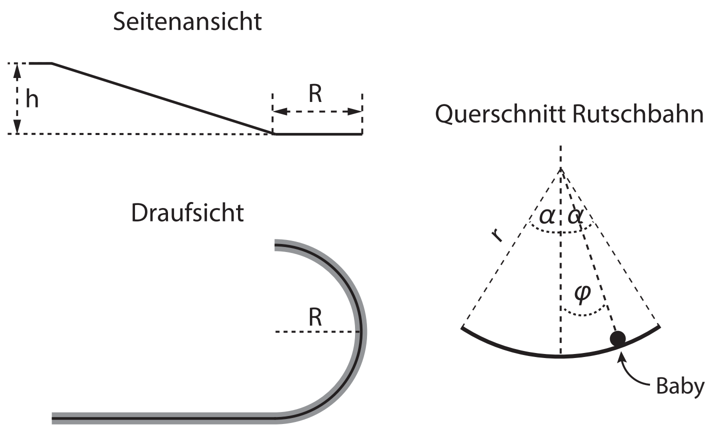



**Abbildung 1** – Schematische Darstellung der Wasserrutsche.

(d) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Tangentialbewegung $\varphi(t)$ des Babys in der Kurve auf. Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung, d.h. verwenden Sie die Kleinwinkelnäherung für Sinus und Cosinus. [2.5]
**Zwischenergebnis**: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\varphi - \frac{v_K^2}{rR} = 0$.

(e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit dem Ansatz $\varphi(t) = A\cos\omega t + \varphi_0$ und unter den entsprechenden Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = 0$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$ , wobei $t = 0$ den Zeitpunkt bezeichnet an dem das Baby in die Kurve eintritt. Bestimmen Sie $A$, $\omega$ und $\varphi_0$. Mit welcher Geschwindgkeit $v_{K,\max}$ darf das Baby maximal rutschen, damit es sicher im Becken ankommt? [3.5]

(f) Nehmen Sie an, der Vater würde fahrlässig handeln und das Baby so beschleunigen, dass es bei Eintritt in die Kurve eine Geschwindigkeit nahe am berechneten Limit $v_{K,\max}$ hätte. Beurteilen Sie die Gefahr für das Baby im Hinblick auf die für die Aufstellung der Bewegungsgleichung gemachten Näherungen. D.h. erklären Sie qualitativ den Effekt des nächsthöheren Terms in $\varphi$. [1]

2. **Stoss an drehbar gelagertem Quadrat** [ $\sum 11$ ]

Wir betrachten den Stoss zwischen einer punktförmigen Masse $m$ mit einem drehbar gelagerten Quadrat, siehe Abbildung 2. Die Drehachse sei fest im Raum. Das Trägheitsmoment des Quadrats bezüglich der Drehachse, die durch den geometrischen Schwerpunkt S des Quadrats geht, sei $J$. Vor dem Stoss bewege sich das Teilchen auf einer Linie senkrecht zur Stosskante des Quadrats im Abstand $h$ vom Schwerpunkt und das Quadrat sei in Ruhe. Aufgrund der drehbaren Lagerung wird bei dem als elastisch angenommenen Stoss ein Teil der kinetischen Energie auf das Quadrat übertragen, das sich in Drehung setzt. Die Seitenlänge des Quadrats sei $a$.

a) In welcher Höhe $h$ müsste das Teilchen auf das Quadrat treffen, damit sich das Quadrat *nicht* in Drehung setzt? Welche Geschwindigkeit hat das Teilchen nach einem solchen Stoss? [1.5]

b) Wie gross ist der Gesamtdrehimpuls des Systems bestehend aus Teilchen und Quadrat vor dem Stoss in Abhängigkeit von $h$? [1]

c) Bestimmen Sie die Erhaltungsgrössen für dieses Stossproblem und leiten Sie daraus Gleichungen ab, die die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoss in Beziehung setzen. [3]

d) Lösen Sie das gefundene Gleichungssystem und bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Teilchens nach dem Stoss $v'$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ des Quadrats. [4]

e) In welchem Abstand $h$ muss der Stoss stattfinden, damit das Teilchen nach dem Stoss im Laborsystem zum Stehen kommt? Wie gross darf $J$ höchstens sein, damit ein solcher Stoss möglich ist? [1.5]

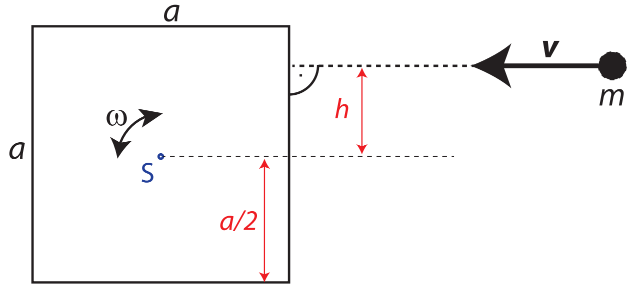



**Abbildung 2** – Elastischer Stoss zwischen einer Punktmasse und einem im Schwerpunkt drehbar gelagerten Quadrat.

3. **Getränkekiste auf Dach** [ $\sum 10$ ]

Wie in Abbildung 3 skizziert, möchte ein Zimmermann mit Hilfe eines Seils eine Getränkekiste zum Giebel des geneigten Daches heraufziehen. Wir nehmen an die Getränkekiste sei würfelförmig mit Kantenlänge $a$ und habe die Masse $m$. Die Massenverteilung der Kiste sei homogen. Die Dachneigung bezeichnen wir mit $\alpha$. Der Zimmermann befestigt nun mittig an der oberen Würfelkante $A$ ein Seil (siehe Abbildung) um die Kiste enlang der Dachschräge hinaufzuziehen. Das Seil sei stets parallel zum Dach ausgerichtet. Der Haft- und Gleitreibungskoeffizient zwischen Dachoberfläche und Getränkekiste sei identisch $\mu$.

**a)** Fertigen Sie eine Skizze mit allen auf die Kiste wirkenden Kräfte an. Um welchen Punkt dreht die Kiste kurz vor dem Kippen? [1.5]

**b)** Betrachten Sie zunächst die Situation der Getränkekiste ohne Seil. Bis zu welchem Winkel $\alpha_{\text{gleit}}$ kann die Kiste auf der Dachschräge stehen ohne wegzurutschen? Geben Sie ihr Ergebnis in Abhängigkeit von $\mu$ an. [2]

**c)** Der Zimmermann versuche nun die Kiste entlang des Daches hinaufzuziehen. Wie gross darf $\alpha_{\text{krit}}$ maximal sein, damit die Kiste bei diesem Versuch nicht umkippt? Untersuchen Sie dazu die Bedingungen für stabiles Gleichgewicht. Lösen Sie die resultierende Gleichung für die beiden Fälle $\mu = 0$ und $\mu = \frac{1}{2}$ explizit nach $\alpha_{\text{krit}}$ auf und diskutieren Sie Ihr Ergebnis. **Hinweis:** Betrachten Sie die relevanten Kräfte und Drehmomente. Berücksichtigen Sie, dass kurz vor einem möglichen Umkippen ($\alpha = \alpha_{\text{krit}}$) die gesamte Normalkraft im Drehpunkt $B$ angreift. [4]

**d)** Welche Massnahmen könnte man treffen, um auch bei steileren Dächern mit $\alpha > \alpha_{\text{krit}}$ die Getränkekiste erfolgreich hinaufzuziehen? [1]

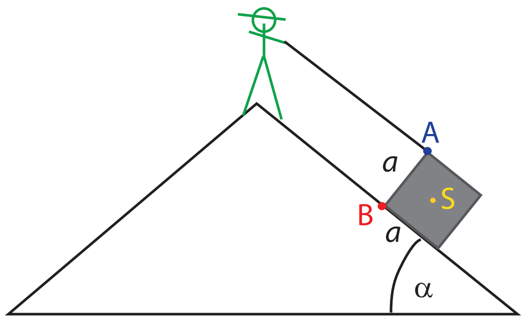



**Abbildung 3** – Schematische Darstellung einer Getränkekiste auf einer Dachschräge. Das Seil greift am Punkt $A$ an.

**e)** Sei $\alpha < \alpha_{\text{krit}}$. Berechnen Sie die gesamte Arbeit, die der Zimmermann verrichtet um die Kiste von der Dachkante auf ein Dach der Höhe $h$ zu ziehen. Betrachten Sie die beiden Fälle mit und ohne Reibung. [1.5]

4. **Geneigte rotierende Scheibe** [ $\sum 14$ ]
Wir betrachten eine reibungsfrei, drehbar gelagerte Scheibe, die im konstanten Winkel $\beta$ relativ zur Erdoberfläche geneigt ist, siehe Abbildung 4. Die Scheibe hat einen Radius von $R = 2\,\mathrm{m}$, eine Dicke von $5\,\mathrm{cm}$ und eine Massendichte von $\rho = 1\,\mathrm{g/cm^3}$. Auf der Platte befinde sich ein Kind mit einer Masse von $m = 30\,\mathrm{kg}$. Die endliche Ausdehnung des Kindes, sowie Reibung durch Luftwiderstand und Lagerung der Scheibe können vernachlässigt werden. Wir wählen ein raumfestes Koordinatensystem, sodass die Scheibenoberfläche in der $xy$-Ebene rotiert und der Koordinatenursprung mit dem Mittelpunkt der Scheibe zusammenfällt. Das System befinde sich unter dem Einfluss der Erdanziehungskraft $F_g$.
**Hinweis:** Numerische Werte sind nur im Teil a) und b) zu berechnen.

**a)** Berechnen Sie durch Lösen des entsprechenden Integrals das Trägheitsmoment $J$ der Scheibe bezüglich ihrer Drehachse. [1.5]

**b)** Betrachten Sie zunächst den Fall $\beta = 0$. Das Kind befinde sich im Abstand $R/2$ vom Zentrum und rotiere mit der Scheibe bei einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 0.2 \times 2\pi/\mathrm{s}$. Berechnen Sie die gesamte kinetische Energie des Systems.[1.5]

**c)** Sei $\beta$ im Folgenden endlich. Welches Drehmoment in $z$-Richtung $M_z$ übt das Kind aufgrund der Gewichtskraft auf die Scheibe aus, wenn es sich am Punkt $\{R/2, 0, 0\}$ befindet? Wo auf der Scheibe müsste sich das Kind befinden, damit dieses Drehmoment verschwindet? [1.5]

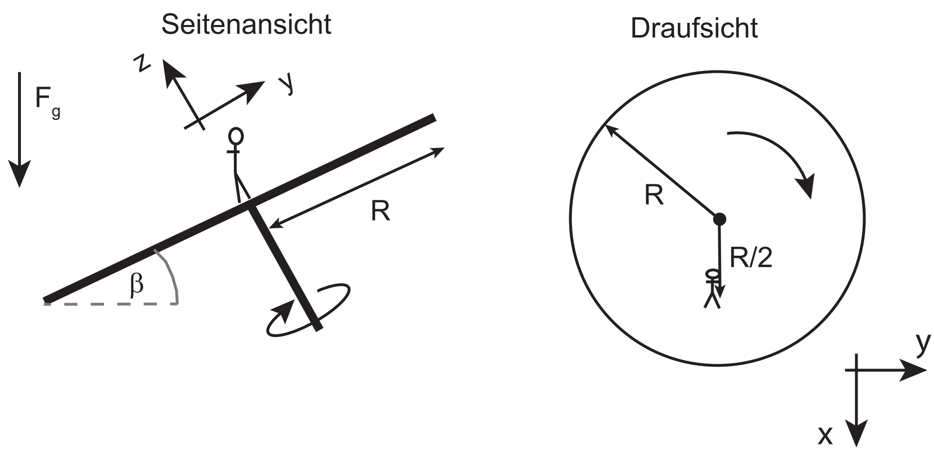



**Abbildung 4** – Ein Kind befindet sich auf einer geneigten drehbaren Scheibe. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die Oberfläche der Scheibe in der $xy$-Ebene liegt.

**d)** Wir nehmen an die Scheibe sei zunächst in Ruhe und sein Vater stellt das Kind an den Punkt $\{R/2, 0, 0\}$ wie in der rechten Abbildung angedeutet. Das Kind versucht nun im Laborsystem an diesem Punkt zu bleiben, indem es mit konstanter Beschleunigung $a$ relativ zur Scheibe in positive $y$-Richtung zu laufen beginnt. Wie gross muss diese Beschleunigung $a$ gewählt werden, damit das Kind im Laborsystem am gleichen Ort bleibt? Welcher Winkelbeschleunigung der Scheibe $\dot{\omega}$ entspricht das? Wie interpretieren Sie die Abhängigkeit vom Neigungswinkel $\beta$? Was passiert im Grenzfall $\beta = 0$? [3]

**e)** Nachdem die Scheibe eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 0.2 \times 2\pi/\mathrm{s}$ erreicht hat, bleibt das Kind relativ zur Scheibe plötzlich stehen und rotiert nun gemeinsam mit der Scheibe im Laborsystem. Welche Winkelgeschwindigkeit hat die Scheibe unmittelbar nach dem Stehenbleiben? Geben Sie die gesamte kinetische Energie kurz bevor und unmittelbar nachdem das Kind stehenbleibt an. Wie erklären Sie sich die Abnahme der kinetischen Energie? [3]

**f)** In einem zweiten Anlauf startet das Kind unten auf der Scheibe am Punkt $\{0, -R/2, 0\}$. Die Scheibe sei in Ruhe. Das Kind läuft nun mit im Laborsystem konstanter Winkelbeschleunigung $\dot{\Omega}$ auf einer Kreisbahn zum Punkt $\{0, +R/2, 0\}$ im Laborsystem. Berechnen Sie zunächst die Gesamtzeit $T$, die das Kind benötigt um diese Strecke zurückzulegen. Berechnen Sie weiterhin die zeitabhängige Winkelbeschleunigung der Scheibe $\dot{\omega}(t)$ im Laborsystem. Welche Winkelgeschwindigkeit $\omega$ hat die Scheibe zum Zeitpunkt $t = T$? [3.5]
**Hinweis:** Verwenden Sie $\int_0^1 \mathrm{d}x \, \sin(\pi x^2) \approx 0.5$ bei Ihrer Rechnung.

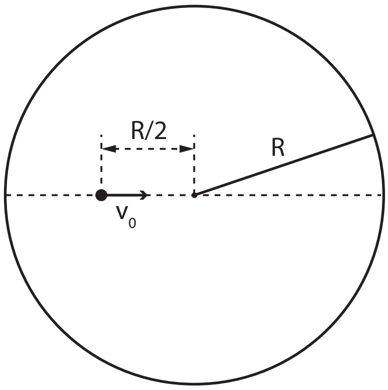
5. **Flug eines Raumschiffes durch kosmischen Nebel** [ $\sum 13$ ]

Das Raumschiff Enterprise (Masse $m$) fliegt zentral durch einen kugelförmigen kosmischen Nebel mit konstanter Dichte $\rho = 50\,\mu\text{g/m}^3$ und Radius $R = 3 \cdot 10^9\,\text{km}$, siehe Abbildung 5 links. Im Abstand $R/2$ vom Zentrum des Nebels fällt der Antrieb des Raumschiffes aus. Zum Zeitpunkt des Ausfalls bewegt sich die Enterprise mit $v_0 = 10\,\text{km/s}$. Die Reibung aufgrund von Stössen zwischen Raumschiff und Nebelpartikeln soll vernachlässigt werden.

(a) Berechnen Sie die Gesamtmasse $M$ des Nebels und bestimmen Sie die Gravitationskraft auf das Raumschiff in Abhängigkeit vom Abstand $r$ ausserhalb des Nebels, also für $r > R$ . Würde sich die Kraft verändern, wenn die gesamte Masse des Nebels im Zentrum konzentriert wäre? [1.5]

(b) Zeigen Sie, dass die Gravitationskraft auf das Raumschiff für Abstände im Inneren des Nebels ($r \leq R$) durch $F = -G_\text{N}\frac{mM}{R^3}r$ gegeben ist. Verwenden Sie hierfür, dass die Gravitationskraft zwischen einer Hohlkugel und einer sich darin befindenden Masse verschwindet. [1.5]

(c) Skizzieren Sie die Gravitationskraft $F(r)$ für $0 < r < 4R$. [1]



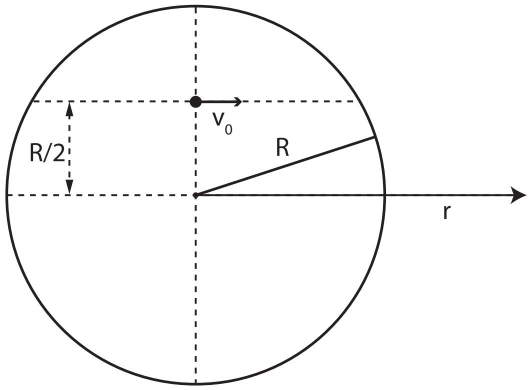




**Abbildung 5** – Schematische Darstellung des Raumschiffes (dicker schwarzer Punkt), das einen kosmischen Nebel mit Radius $R$ durchfliegt. Links: Situation für Aufgaben a-c. Rechts: Situation für Aufgabe d.

(d) Berechnen Sie aus der Gravitationskraft das Gravitationspotential $V(r)$ innerhalb und ausserhalb des Nebels unter Berücksichtigung dass $V(r \to \infty) = 0$. Skizzieren Sie $V(r)$. [3]

(e) Zeigen Sie, dass die anfängliche kinetische Energie des Raumschiffes ausreicht um den Nebel zu verlassen. In welchem Abstand $r$ wird das Raumschiff seine Bewegungsrichtung umkehren und wieder zurück in Richtung des Zentrums des Nebels beschleunigt? [3]

(f) Nehmen Sie nun an, dass die ursprüngliche Bahn des Raumschiffes nicht durch das Zentrum geht, sondern in einem Abstand $R/2$ vom Zentrum vorbeiführt, siehe Abbildung 5 rechts. Der Ausfall des Antriebs passiert wieder im Abstand $R/2$ vom Zentrum bei gleicher Geschwindigkeit $v_0$. Ist es nun leichter oder schwieriger den Nebel zu verlassen? Argumentieren Sie mit Energie- und Drehimpulserhaltung. Berechnen Sie nun die minimale Anfangsgeschwindigkeit $v_{0,\mathrm{min}}$, die nötig ist, um in diesem Fall den Nebel zu verlassen. Separieren Sie hierzu die Radial- und Tangentialbewegung, indem Sie unter Berücksichtigung der Drehimpulserhaltung ein effektives Potential für die Radialbewegung einführen. [3]