

Nun haben die Matrizen  $A^{(r)}$  (8.8.6) des Buneman-Verfahrens die gleichen Eigenvektoren  $x_k$  wie  $A$  (8.8.2c). Also können wieder Fouriertechniken verwendet werden, um die reduzierten Systeme  $M^{(r)}z^{(r)} = b^{(r)}$  zu lösen, die in (8.8.7), 1)b) vorkommen. Man kann auf diese Weise ein *kombiniertes Verfahren* konstruieren, das aus  $l$  Reduktionsschritten vom Buneman-Typ,  $r = 1, 2, \dots, l$ , und der anschließenden Lösung von Systemen niedrigerer Ordnung durch Fouriemethoden besteht. Dies führt auf den FACR( $l$ )-Algorithmus von Hockney (1969) (FACR: Fourier analysis and cyclic reduction). Swarztrauber (1977) konnte zeigen, daß man bei einer geeigneten Wahl von  $l$  ein Verfahren erhält, das nur  $O(N^2 \log_2 \log_2 N)$  Operationen benötigt, um das Poisson-Problem auf einem  $N \times N$ -Gitter mit  $p = q = N = 2^{k+1} - 1$  zu lösen.

In der vorliegenden Form dienen die Verfahren zur Lösung des diskretisierten Dirichletschen Randwertproblems für die Poisson-Gleichung auf einem Rechteckgebiet. Es gibt Varianten der Verfahren zur Lösung analoger Randwertprobleme für die Helmholtzgleichung oder die biharmonische Gleichung auf Rechtecksgebieten.

Reduktionsverfahren mit noch besseren Stabilitätseigenschaften zur Lösung solcher Probleme wurden von Schröder, Trottenberg und Reutersberg (1973, 1976) angegeben und eingehend untersucht. Es gibt ferner kompliziertere Versionen dieser Verfahren zur Lösung der entsprechenden diskretisierten Randwertprobleme für Nichtrechtecksgebiete [s. Buzbee und Dorr (1974), Buzbee et al. (1971), Proskurowski und Widlund (1976), O'Leary und Widlund (1979)]. Während diese Verfahren direkt, also nichtiterativ sind, gibt es mittlerweile leistungsfähige Iterationsverfahren mit erheblich verbesserten Konvergenzeigenschaften. Zu ihnen gehören die *Mehrgitterverfahren*, deren Prinzipien wir im nächsten Abschnitt kurz erläutern wollen, und die modernen *Gebiets-Zerlegungs-Methoden*: Hier sei der Leser auf die Spezialliteratur verwiesen, etwa Chan, Glowinski, Periaux und Widlund (1989); Glowinski, Golub, Meurant und Periaux (1988); Keyes und Gropp (1987).

## 8.9 Mehrgitterverfahren

Mehrgitterverfahren gehören zu den leistungsfähigsten Verfahren, um die linearen Gleichungssysteme zu lösen, die man bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen erhält. Wir wollen hier nur die Grundideen dieser vielseitigen und variantenreichen Verfahren in einer sehr einfachen Situation studieren, was aber schon die wesentlichen Prinzipien klar werden läßt. Für eine eingehende Behandlung muß auf die Spezialliteratur verwiesen werden,

z. B. Brandt (1977), Hackbusch und Trottenberg (1982), insbesondere auf die Monographie von Hackbusch (1985). Unsere Darstellung schließt sich an Briggs (1987) an. Anstelle von Randwertproblemen für partielle Differentialgleichungen, wo die Stärke von Mehrgitterverfahren erst recht zum Tragen kommt, betrachten wir hier als Modellproblem nur die Randwertaufgabe [vgl. (7.4.1)]

$$(8.9.1) \quad \begin{aligned} -y''(x) &= f(x) \quad \text{für } x \in \Omega := (0, \pi), \\ y(0) &= y(\pi) = 0, \end{aligned}$$

für eine gewöhnliche Differentialgleichung, die als eindimensionales Analogon des zweidimensionalen Modellproblems (8.4.1) anzusehen ist. Die übliche Diskretisierung mit einer Schrittweite  $h = \pi/n$  führt zu einem eindimensionalen Gitter  $\Omega_h = \{x_j = jh \mid j = 1, \dots, n-1\} \subset \Omega$  und schließlich zu einem linearen Gleichungssystem

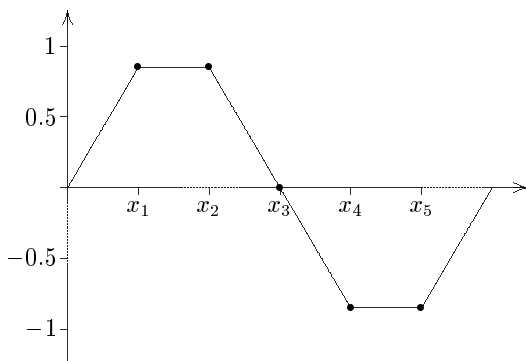
$$(8.9.2) \quad A_h u_h = f_h, \quad A_h := \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad f_h := \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix},$$

für einen Vektor  $u_h = [u_{h;1}, \dots, u_{h;n-1}]^T$  von Näherungswerten  $u_{h;j} \approx y(x_j)$  für die exakte Lösung  $y$  auf dem Gitter  $\Omega_h$ . Der Index  $h$  deutet auch an, daß  $u_h$  und  $f_h$  als Funktionen auf dem Gitter  $\Omega_h$  aufzufassen sind: Die  $j$ -te Komponente  $u_{h;j}$  von  $u_h$  läßt sich so auch als Wert der Gitterfunktion  $u_h(x)$  für  $x = x_j \in \Omega_h$  schreiben,  $u_{h;j} = u_h(x_j)$ , was wir gelegentlich tun werden. Die Matrix  $A_h$  ist eine  $(n-1)$ -reihige Matrix, deren Eigenwerte  $\lambda_h^{(k)}$  und Eigenvektoren  $z_h^{(k)}$  explizit angegeben werden können [vgl. Abschnitt 8.4]:

$$(8.9.3) \quad \begin{aligned} z_h^{(k)} &:= [\sin kh, \sin 2kh, \dots, \sin(n-1)kh]^T, \\ \lambda_h^{(k)} &:= \frac{1}{h^2} 4 \sin^2 \frac{kh}{2} = \frac{2}{h^2} (1 - \cos kh), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Dies bestätigt man leicht durch Verifikation von  $A_h z_h^{(k)} = \lambda_h^{(k)} z_h^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Die Vektoren  $z_h^{(k)}$  besitzen die euklidische Norm  $\|z_h^{(k)}\| = \sqrt{n/2}$  und sind orthogonal zueinander [Satz (6.4.2)].

Betrachtet man die Komponenten  $\sin jkh = \sin \frac{jk\pi}{n}$  der Vektoren  $z_h^{(k)}$  auf den Gitterpunkten  $x_j$  von  $\Omega_h$  für  $j = 1, \dots, n-1$ , so sieht man, daß die  $z_h^{(k)} = z_h^{(k)}$  mit wachsendem  $k = 1, \dots, n-1$  Schwingungen wachsender „Frequenz“  $k$  beschreiben: Die Frequenz  $k$  gibt gerade die Anzahl der Halbwellen auf  $\Omega_h$  an (s. Fig. 24 für  $n = 6$ ,  $k = 1$ ).

Fig. 24. Die Gitterfunktion  $z^{(2)}$ .

Um die Notation zu vereinfachen, lassen wir gelegentlich den Index  $h$  fort, wenn es klar ist, zu welchen Schrittweiten  $h$  bzw. Gittern  $\Omega_h$  die Vektoren und Matrizen  $u = u_h$ ,  $f = f_h$ ,  $A = A_h$  gehören.

Eine der Motivationen für Mehrgitterverfahren liegt in dem Konvergenzverhalten der üblichen Iterationsverfahren (8.1.7), (8.1.8) zur Lösung von  $Au = f$ . Wir wollen dies für das Jacobi-Verfahren (8.1.7) näher studieren. Die Standardzerlegung (8.1.5), (8.1.6)

$$A_h = D_h(I - J_h), \quad D_h = \frac{2}{h^2}I,$$

von  $A = A_h$  führt zu der  $(n-1)$ -reihigen Matrix

$$J = J_h = I - \frac{h^2}{2}A_h = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und der Iterationsformel des Jacobi-Verfahrens

$$v^{(i+1)} = Jv^{(i)} + \frac{h^2}{2}f,$$

das eine Folge  $v^{(i)} (= v_h^{(i)})$  von Näherungsvektoren für die exakte Lösung  $u = u_h$  von (8.9.2) erzeugt. Der Fehler  $e^{(i)} := v^{(i)} - u$  genügt dann der Rekursionsformel

$$e^{(i+1)} = Je^{(i)} = J^{i+1}e^{(0)}.$$

Die Iterationsmatrix  $J = J_h = I - \frac{h^2}{2}A_h$  besitzt die Eigenwerte

$$\mu^{(k)} = \mu_h^{(k)} = 1 - \frac{h^2}{2} \lambda_h^{(k)} = \cos kh, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

und die gleichen Eigenvektoren  $z^{(k)} = z_h^{(k)}$  wie  $A_h$ . Wir analysieren das Verhalten des Fehlers  $e$  nach einem Iterationsschritt  $e \Rightarrow \bar{e} = J e$  und zerlegen dazu  $e$  nach den Eigenvektoren von  $J = J_h$  [s. 6.6.3]

$$e = \rho_1 z^{(1)} + \dots + \rho_{n-1} z^{(n-1)}.$$

Hier gibt das Gewicht  $\rho_k$  an, wie stark die Schwingung der Frequenz  $k$  an  $e$  beteiligt ist. Es folgt

$$\bar{e} = \rho_1 \mu^{(1)} z^{(1)} + \dots + \rho_{n-1} \mu^{(n-1)} z^{(n-1)}.$$

Wegen  $1 > \mu^{(1)} > \mu^{(2)} > \dots > \mu^{(n-1)} = -\mu^{(1)} > -1$  folgt, daß alle Frequenzen  $k = 1, 2, \dots, n-1$  von  $e$  gedämpft werden, jedoch in unterschiedlichem Maße: Die extremen Frequenzen mit  $k = 1$  und  $k = n-1$  werden am schlechtesten gedämpft, die mittleren mit  $k \approx \frac{n}{2}$  dagegen sehr gut.

Durch Einführung eines geeigneten Relaxationsfaktors  $\omega$  in die Iterationsmatrix läßt sich das Dämpfungsverhalten für die hohen Frequenzen  $k$  mit  $\frac{n}{2} \leq k \leq n-1$  erheblich verbessern. Dazu betrachten wir das *gedämpfte Jacobi-Verfahren* (8.1.3), (8.1.4), (8.1.7) das zu der Zerlegung  $A = A_h = B - (B - A)$  mit  $B := (1/\omega)D$  gehört und zu den Iterationsformeln

$$(8.9.4) \quad v^{(i+1)} = J(\omega) v^{(i)} + \frac{\omega}{2} h^2 f$$

mit der Matrix  $J_h(\omega) = J(\omega) := (1 - \omega)I + \omega J$  führt. Für  $\omega = 1$  erhält man das ursprüngliche Jacobi-Verfahren zurück,  $J(1) = J$ .  $J(\omega)$  besitzt offensichtlich die Eigenwerte

$$(8.9.5) \quad \mu_h^{(k)}(\omega) = \mu^{(k)}(\omega) := 1 - \omega + \omega \mu^{(k)} = 1 - 2\omega \sin^2 \frac{kh}{2}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

und wieder die Eigenvektoren  $z^{(k)} = z_h^{(k)}$ .

Ein Iterationsschritt transformiert den Fehler folgendermaßen:

$$(8.9.6) \quad e = \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k z^{(k)} \Rightarrow \bar{e} = J(\omega) e = \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \mu^{(k)}(\omega) z^{(k)}.$$

Wegen  $|\mu^{(k)}(\omega)| < 1$  für alle  $0 < \omega \leq 1$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , werden für  $0 < \omega \leq 1$  alle Frequenzen des Fehlers gedämpft. Jedoch kann man es bei passender Wahl von  $\omega$  erreichen, daß die hohen Frequenzen  $k$  mit  $\frac{n}{2} \leq k \leq n-1$  besonders stark gedämpft werden: Für  $\omega = \omega_0 := 2/3$  wird

$$\max_{\frac{n}{2} \leq k \leq n-1} |\mu^{(k)}(\omega)|$$

minimal, und es gilt dann  $|\mu^{(k)}(\omega)| \leq 1/3$  für  $\frac{n}{2} \leq k \leq n-1$ : Man beachte, daß dieser Dämpfungsfaktor  $1/3$  für die hohen Frequenzen *nicht* von  $h$  abhängt, während nach wie vor  $\max_k |\mu^{(k)}(\omega)| = \mu^{(1)}(\omega) = 1 - 2\omega \sin^2(h/2) = 1 - O(h^2)$  für kleines  $h \downarrow 0$  gegen 1 konvergiert, also auch das gedämpfte Jacobi-Verfahren für  $h \downarrow 0$  immer schlechter konvergiert [vgl. die Diskussion in Abschnitt 8.4].

Ein Nachteil des gedämpften Jacobi-Verfahrens ist es, daß es von einem richtig zu wählenden Parameter  $\omega$  abhängt. In der Praxis zieht man parameterunabhängige Iterationsverfahren vor. Ein solches Verfahren ist das *Gauß-Seidel-Verfahren* (8.1.8), das zu der Zerlegung

$$A_h = D_h - E_h - F_h, \quad E_h = F_h^T := \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

von  $A_h$  gehört. Man erhält die Iterierte  $v^{(i+1)}$  aus  $v^{(i)}$  durch Lösung der linearen Gleichungen

$$(A_h - E_h)v^{(i+1)} - F_h v^{(i)} = f_h.$$

Man kann zeigen, daß das Gauß-Seidel-Verfahren ähnliche Dämpfungseigenschaften wie das gedämpfte Jacobi-Verfahren besitzt. Da die Theorie des gedämpften Jacobi-Verfahrens einfacher ist, beschränken wir uns im folgenden auf die Analyse dieses Verfahrens.

Durch relativ wenige Schritte des gedämpften Jacobiverfahrens kann man eine Iterierte  $v^{(i)} = v_h^{(i)}$  finden, deren Fehler

$$e_h^{(i)} = v_h^{(i)} - u_h = \rho_1^{(i)} z_h^{(1)} + \dots + \rho_{n-1}^{(i)} z_h^{(n-1)}$$

praktisch keine hochfrequenten Anteile mehr enthält,

$$\max_{n/2 \leq k < n} |\rho_k^{(i)}| \ll \max_{1 \leq k < n/2} |\rho_k^{(i)}|.$$

Hier setzt nun eine weitere Überlegung an:  $e_h^{(i)}$  ist Lösung des Gleichungssystems  $A_h e_h^{(i)} = -r_h^{(i)}$ , wobei  $r_h^{(i)} = f_h - A_h v_h^{(i)}$  das Residuum von  $v_h^{(i)}$  ist. Mit  $e_h^{(i)}$  enthält auch die Zerlegung von

$$r_h^{(i)} = - \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k^{(i)} \lambda_h^{(k)} z_h^{(k)}$$

kaum noch hochfrequente Anteile. Nun kann man „langwellige“ Gitterfunktionen  $g_h$  auf  $\Omega_h$  recht gut durch eine Gitterfunktion  $g_{2h}$  auf dem

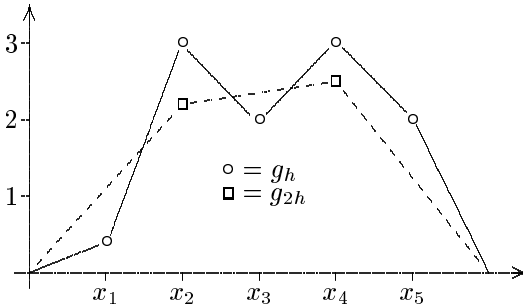
größeren Gitter  $\Omega_{2h} = \{j \cdot 2h \mid j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$  (wir setzen hier voraus, daß  $n$  eine gerade Zahl ist) mit Hilfe eines *Projektionsoperators*  $I_h^{2h}$  approximieren:

$$g_{2h} := I_h^{2h} g_h, \quad I_h^{2h} := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dabei ist  $I_h^{2h}$  eine  $(\frac{n}{2} - 1) \times (n - 1)$ -Matrix: Faßt man  $g_h$  als Funktion auf  $\Omega_h$  und  $g_{2h}$  als Funktion auf dem „groben“ Gitter  $\Omega_{2h}$  auf, so erhält man  $g_{2h}$  durch *Mittelung*

$$g_{2h}(j \cdot 2h) = \frac{1}{4}g_h((2j - 1)h) + \frac{2}{4}g_h(2j \cdot h) + \frac{1}{4}g_h((2j + 1)h)$$

für  $j = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$  (s. Fig. 25 für  $n = 6$ ).



**Fig. 25.** Projektion durch Mittelung.

Anstelle des oben beschriebenen Mittelungsoperators könnte man auch den einfacheren Projektionsoperator

$$I_h^{2h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

wählen, der der Funktion  $g_h$  auf  $\Omega_h$  die Funktion  $g_{2h} = I_h^{2h} g_h$  mit

$$g_{2h}(j \cdot 2h) := g_h(2j \cdot h), \quad j = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

auf  $\Omega_{2h}$  zuordnet. Wir werden diese Möglichkeit aber nicht weiter diskutieren.

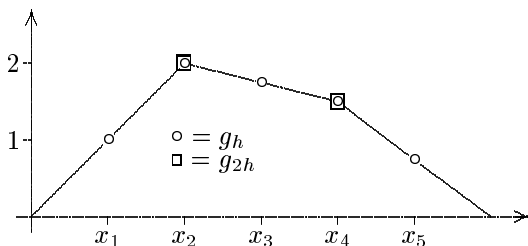
Umgekehrt kann man mit Hilfe eines *Interpolationsoperators*  $I_{2h}^h$  jede Gitterfunktion  $g_{2h}$  auf dem groben Gitter  $\Omega_{2h}$  durch Interpolation zu einer Gitterfunktion  $g_h = I_{2h}^h g_{2h}$  auf dem feinen Gitter  $\Omega_h$  fortsetzen, wenn man  $I_{2h}^h$  z. B. definiert durch:

$$I_{2h}^h := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & 1 & \vdots & & \\ & & \vdots & 1 & \\ & & & 2 & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}.$$

Dabei ist  $I_{2h}^h$  eine  $(n-1) \times (\frac{n}{2}-1)$ -Matrix,  $g_h$  wird durch Interpolation aus  $g_{2h}$  erhalten ( $g_{2h}(0) = g_{2h}(\pi) := 0$ ), d. h. für  $j = 1, \dots, n-1$  gilt

$$g_h(jh) := \begin{cases} g_{2h}(\frac{j}{2} \cdot 2h) & \text{falls } j \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2} g_{2h}(\frac{j-1}{2} \cdot 2h) + \frac{1}{2} g_{2h}(\frac{j+1}{2} \cdot 2h) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(s. Fig. 26 für  $n = 6$ ).



**Fig. 26.** Fortsetzung durch Interpolation.

Die einfachste Form eines Mehrgitterverfahrens besteht nun darin, im Anschluß an eine Reihe Glättungsschritte mit dem gedämpften Jacobi-Verfahren (8.9.4), die eine Näherungslösung  $v_h^{(i)}$  von  $A_h u_h = f_h$  mit dem Fehler  $e_h^{(i)}$  und dem Residuum  $r_h^{(i)}$  liefern, das Residuum  $r_h^{(i)} \Rightarrow r_{2h}^{(i)} := I_h^{2h} r_h^{(i)}$  auf das gröbere Gitter  $\Omega_{2h}$  zu projizieren, dann das lineare Gleichungssystem

$$A_{2h} e_{2h}^{(i)} = -r_{2h}^{(i)}$$

„auf dem groben Gitter“ zu lösen und schließlich die Lösung  $e_{2h}^{(i)} \Rightarrow \tilde{e}_h^{(i)} := I_{2h}^h e_{2h}^{(i)}$  auf das feine Gitter  $\Omega_h$  fortzusetzen. Man erwartet dabei, daß  $\tilde{e}_h^{(i)}$  jedenfalls dann eine recht gute Approximation für die Lösung  $e_h^{(i)}$  von  $A_h e_h^{(i)} = -r_h^{(i)}$  ist, falls  $e_h^{(i)}$  eine „langwellige“ Gitterfunktion ist, und daß deshalb  $v_h^{(i+1)} := v_h^{(i)} - \tilde{e}_h^{(i)}$  eine sehr viel bessere Approximation für die Lösung  $u_h$  ist als  $v_h^{(i)}$ .

Insgesamt erhalten wir so ein einfaches *Zweigitterverfahren* (ZG), das aus einer gegebenen Näherungslösung  $v_h^{(i)}$  von  $A_h u_h = f_h$  die nächste Näherungslösung  $v_h^{(i+1)} := ZG(v_h^{(i)})$  nach folgender Vorschrift erzeugt:

(8.9.7) **Zweigitterverfahren:** Sei  $v_h$  ein Gittervektor auf  $\Omega_h$ .

- 1) (Glättungsschritt) Führe  $\nu$  Schritte des gedämpften Jacobi-Verfahrens (8.9.4) mit  $\omega = \omega_0 := 2/3$  und dem Startvektor  $v_h$  durch. Das Resultat sei der Vektor  $w_h$  mit dem Residuum  $r_h := f_h - A_h w_h$ .
- 2) (Projektionsschritt) Berechne  $r_{2h} := I_{2h}^{2h} r_h$ .
- 3) (Grobitterlösung) Löse  $A_{2h} e_{2h} = -r_{2h}$ .
- 4) (Interpolation und Feingitterkorrektur) Setze  $ZG(v_h) := w_h - I_{2h}^h e_{2h}$ .

In unserem einfachen Modellproblem können wir das Verhalten des Fehlers

$$e_h := v_h - u_h \rightarrow \bar{e}_h := \bar{v}_h - u_h$$

in einem Iterationsschritt  $v_h \Rightarrow \bar{v}_h := ZG(v_h)$  von (8.9.7) verhältnismäßig leicht analysieren. Nach den  $\nu$  Dämpfungsschritten gilt für den Fehler  $d_h := w_h - u_h$  von  $w_h$  wegen (8.9.6)

$$d_h = J(\omega_0)^\nu e_h, \quad r_h = -A_h d_h = -A_h J(\omega_0)^\nu e_h.$$

Weiter findet man aus (8.9.7),

$$\begin{aligned} A_{2h} e_{2h} &= -r_{2h} = -I_{2h}^{2h} r_h = I_{2h}^{2h} A_h d_h, \\ \bar{e}_h &= \bar{v}_h - u_h = d_h - I_{2h}^h e_{2h}, \end{aligned}$$

ohne Mühe die Formel

$$\begin{aligned} \bar{e}_h &= (I - I_{2h}^h A_{2h}^{-1} I_{2h}^{2h} A_h) d_h \\ (8.9.8) \quad &= C_h \cdot J(\omega_0)^\nu e_h \end{aligned}$$

mit der  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix

$$C_h := I - I_{2h}^h A_{2h}^{-1} I_{2h}^{2h} A_h.$$

Um die Fortpflanzung der einzelnen Frequenzen in  $e_h$  nach  $\bar{e}_h$  zu studieren, benötigen wir Formeln für die Abbildung  $C_h z_h^{(k)}$  der Eigenvektoren  $z_h^{(k)}$  von



$A_h$ . Mit den Abkürzungen  $c_k := \cos^2(kh/2)$ ,  $s_k := \sin^2(kh/2)$ ,  $k' := n - k$ , verifiziert man sofort durch einfaches Nachrechnen

$$(8.9.9) \quad I_h^{2h} z_h^{(k)} = \begin{cases} c_k z_{2h}^{(k)} & \text{für } k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \\ -s_{k'} z_{2h}^{(k')} & \text{für } k = \frac{n}{2}, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Dabei sind die  $z_{2h}^{(k)}$ ,  $1 \leq k < n/2$ , gerade die Eigenvektoren von  $A_{2h}$  zu den Eigenwerten

$$\lambda_{2h}^{(k)} = \frac{4}{(2h)^2} \sin^2 kh = \frac{1}{h^2} \sin^2 kh$$

[s. (8.9.3)], so daß

$$A_{2h}^{-1} z_{2h}^{(k)} = \frac{1}{\lambda_{2h}^{(k)}} z_{2h}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Ebenfalls durch Nachrechnen zeigt man

$$(8.9.10) \quad I_h^{2h} z_{2h}^{(k)} = c_k z_h^{(k)} - s_k z_h^{(k')}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Durch Kombination dieser Resultate erhält man für  $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$

$$\begin{aligned} I_{2h}^h A_{2h}^{-1} I_h^{2h} A_h z_h^{(k)} &= \lambda_h^{(k)} I_{2h}^h A_{2h}^{-1} I_h^{2h} z_h^{(k)} \\ &= \lambda_h^{(k)} c_k I_{2h}^h A_{2h}^{-1} z_{2h}^{(k)} \\ &= \frac{\lambda_h^{(k)}}{\lambda_{2h}^{(k)}} c_k I_{2h}^h z_{2h}^{(k)} \\ &= \frac{\lambda_h^{(k)}}{\lambda_{2h}^{(k)}} c_k (c_k z_h^{(k)} - s_k z_h^{(k')}). \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\frac{\lambda_h^{(k)}}{\lambda_{2h}^{(k)}} = \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2 kh/2}{\frac{1}{h^2} \sin^2 kh} = \frac{4s_k}{\sin^2 kh}, \quad c_k s_k = \frac{1}{4} \sin^2 kh,$$

bekommt man schließlich für  $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$

$$(8.9.11) \quad C_h z_h^{(k)} = (I - I_{2h}^h A_{2h}^{-1} I_h^{2h} A_h) z_h^{(k)} = s_k z_h^{(k)} + s_k z_h^{(k')}.$$

Auf die gleiche Weise berechnet man auch die Wirkung von  $C_h$  auf die „hochfrequenten“ Vektoren  $z_h^{(k')}$ :

$$(8.9.12) \quad C_h z_h^{(k')} = c_k z_h^{(k)} + c_k z_h^{(k')}, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2}.$$

Wir können nun folgenden Satz zeigen:

(8.9.13) **Satz:** Wählt man  $\nu = 2$ ,  $\omega_0 = 2/3$ , so gilt nach einem Schritt von (8.9.7) für die Fehler  $e_h := v_h - u_h$ ,  $\bar{e}_h := \bar{v}_h - u_h$  von  $v_h$  und  $\bar{v}_h := ZG(v_h)$  die Abschätzung

$$\|\bar{e}_h\|_2 \leq 0.782 \|e_h\|_2.$$

Das Zweigitterverfahren liefert also Vektoren  $v_h^{(j+1)} = ZG(v_h^{(j)})$ , deren Fehler  $e_h^{(j)} = v_h^{(j)} - u_h$  mit einer von  $h$  unabhängigen Konvergenzrate gegen 0 konvergieren,

$$\|e_h^{(j)}\|_2 \leq 0.782^j \|e_h^{(0)}\|_2.$$

Dies bemerkenswert, weil die Konvergenzraten aller bisher behandelten Iterationsverfahren [vgl. Abschnitt 8.4] von  $h$  abhängen und für  $h \downarrow 0$  immer schlechter werden.

**Beweis:** Der Fehler  $e_h = v_h - u_h$  besitze die Zerlegung

$$e_h = \rho_1 z_h^{(1)} + \cdots + \rho_{n-1} z_h^{(n-1)}.$$

Wir haben bereits gesehen (s. (8.9.5)), daß  $J(\omega_0)$  ebenfalls die Eigenvektoren  $z_h^{(k)}$  zu den Eigenwerten  $\mu_h^{(k)}(\omega_0) = 1 - 2\omega_0 s_k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , besitzt. Nach Wahl von  $\omega_0$  gilt dann für  $k = 1, \dots, \frac{n}{2}$ ,  $k' := n - k$

$$|\mu_h^{(k)}(\omega_0)| < 1, \quad |\mu_h^{(k')}(\omega_0)| \leq \frac{1}{3}.$$

Aus (8.9.6), (8.9.11) und (8.9.12) folgt für  $k = 1, \dots, \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned} C_h J(\omega_0)^v z_h^{(k)} &= (\mu_h^{(k)}(\omega_0))^v (s_k z_h^{(k)} + s_k z_h^{(k')}) =: \alpha_k (z_h^{(k)} + z_h^{(k')}), \\ C_h J(\omega_0)^v z_h^{(k')} &= (\mu_h^{(k')}(\omega_0))^v (c_k z_h^{(k)} + c_k z_h^{(k')}) =: \beta_k (z_h^{(k)} + z_h^{(k')}), \end{aligned}$$

wobei für die  $\alpha_k := (\mu_h^{(k)}(\omega_0))^v s_k$ ,  $\beta_k := (\mu_h^{(k')}(\omega_0))^v c_k$  die Abschätzungen

$$|\alpha_k| \leq s_k \leq \frac{1}{2}, \quad |\beta_k| \leq \frac{1}{3^v} \quad \text{für } k = 1, \dots, \frac{n}{2}$$

gelten. Damit erhält man für den Fehler ( $\delta_{n/2} := 1/2$ , sonst  $\delta_k := 1$ )

$$\begin{aligned} \bar{e}_h &= C_h J(\omega_0)^v e_h \\ &= \sum_{k=1}^{n/2} \delta_k (\rho_k \alpha_k + \rho_{k'} \beta_k) (z_h^{(k)} + z_h^{(k')}). \end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalität der  $z_h^{(k)}$  und  $\|z_h^{(k)}\|^2 = n/2$  für  $k = 1, \dots, n-1$  erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\bar{e}_h\|^2 &= n \left[ \sum_{k=1}^{n/2} \delta_k (\rho_k^2 \alpha_k^2 + \rho_{k'}^2 \beta_k^2 + 2\rho_k \rho_{k'} \alpha_k \beta_k) \right] \\
&\leq n \left[ \sum_{k=1}^{n/2} \delta_k (\rho_k^2 \alpha_k^2 + \rho_{k'}^2 \beta_k^2 + (\rho_k^2 + \rho_{k'}^2) |\alpha_k \beta_k|) \right] \\
&\leq n \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3^v} \right) \sum_{k=1}^{n/2} \delta_k (\rho_k^2 + \rho_{k'}^2) \\
&= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3^v} \right) \|e_h\|^2.
\end{aligned}$$

Für  $v = 2$  folgt daraus die Behauptung des Satzes.  $\square$

Für das Zweigitterverfahren stellt sich das Problem, wie man in Schritt 3) von (8.9.7) das lineare Gleichungssystem  $A_{2h}e_{2h} = -r_{2h}$  auf dem größeren Gitter  $\Omega_{2h}$  löst. Hier liegt die Idee nahe, das Zweigitterverfahren auch zur Lösung dieses Systems zu verwenden unter Benutzung von Lösungen von Gleichungen auf dem nächstgrößeren Gitter  $\Omega_{4h}$  usw. Man erhält so *Mehrgitterverfahren* im engeren Sinne. Als einen wesentlichen Bestandteil der verschiedenen denkbaren Verfahren dieses Typs beschreiben wir hier noch den sog. *Mehrgitter-V-Zyklus*, der in jedem Schritt zur Lösung von  $A_h u_h = f_h$  auf dem feinsten Gitter  $\Omega_h$  alle Gitter

$$\Omega_h \rightarrow \Omega_{2h} \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_{2^j h} \rightarrow \Omega_{2^{j-1} h} \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_h$$

der Reihe nach besucht. Der Name V-Zyklus rührt daher, daß man zunächst vom feinsten zum größten Gitter „absteigt“ und dann wieder zum feinsten Gitter „aufsteigt“. Während eines V-Zyklus wird eine Näherungslösung  $v_h$  von  $A_h u_h = f_h$  durch eine neue Näherungslösung

$$v_h \leftarrow M V_h(v_h, f_h)$$

ersetzt, wobei die Funktion  $M V_h(v_h, f_h)$  rekursiv definiert ist durch

(8.9.14) **Mehrgitter-V-Zyklus:** Gegeben  $v_h, f_h$ . Setze  $H := h$ .

1) Wende  $v$ -mal das gedämpfte Jacobi-Verfahren (8.9.4) (mit  $\omega = \omega_0 = 2/3$ ) zur Lösung von  $A_H u_H = f_H$  mit dem Startvektor  $v_H$  an und bezeichne das Resultat wieder mit  $v_H$ .

2) Falls  $H = 2^j h$ , fahre fort mit 4). Andernfalls setze

$$f_{2H} := I_H^{2H}(f_H - A_H v_H), \quad v_{2H} := M V_{2H}(0, f_{2H}).$$

3) Berechne  $v_H := v_H + I_{2H}^H v_{2H}$ .

4) Wende  $v$ -mal (8.9.4) zur Lösung von  $A_H u_H = f_H$  ausgehend vom Startwert  $v_H$  an und nenne das Ergebnis wieder  $v_H$ .

Weitere Varianten sind in der Literatur beschrieben und analysiert worden [s. z. B. Brandt (1977), Hackbusch und Trottenberg (1982), Hackbusch (1985), McCormick (1987)]. Für die effektivsten unter ihnen kann man unter sehr allgemeinen Bedingungen zeigen, daß sie zur Lösung von Diskretisierungsgleichungen wie  $A_h u_h = f_h$  mit  $N$  Unbekannten nur  $O(N)$  Operationen benötigen, um eine Näherungslösung  $v_h$  zu finden, deren Fehler  $\|v_h - u_h\| = O(h^2)$  von der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers  $\max_{x \in \Omega_h} \|y(x) - u_h(x)\| = \tau(h) = O(h^2)$  ist [vgl. Satz (7.4.10)]. Da die exakte Lösung  $u_h$  der diskretisierten Gleichung  $A_h u_h = f_h$  sich von der exakten Lösung  $y(x)$  des ursprünglichen Problems (8.9.1) durch den Diskretisierungsfehler  $\tau(h)$  unterscheidet, hat es keinen Sinn, ein  $v_h$  mit  $\|v_h - u_h\| \ll \tau(h)$  zu bestimmen.

Für das einfache Zweigitterverfahren (8.9.7) können wir mit Hilfe von Satz (8.9.13) ein etwas schwächeres Ergebnis zeigen: Wegen  $N = n - 1$  und  $h^2 = \pi^2/n^2$  erfordert dieses Verfahren nach (8.9.13)  $j = O(\ln N)$  Iterationen, um z. B. aus der Startlösung  $v_h^{(0)} = 0$  ein  $v_h^{(j)}$  mit  $\|v_h^{(j)} - u_h\| = O(h^2)$  zu berechnen. Da die Lösung des tridiagonalen Gleichungssystems in Schritt 3) von (8.9.7)  $O(N)$  Operationen erfordert, benötigt (8.9.7) insgesamt  $O(N \ln N)$  Operationen, um eine Lösung akzeptabler Genauigkeit zu bestimmen.

## 8.10 Vergleich der Iterationsverfahren

Zum Vergleich der Verfahren aus diesem Kapitel betrachten wir den Rechenaufwand, den diese Verfahren bei der Lösung des folgenden Randwertproblems

$$(8.10.1) \quad \begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} + \gamma x u_x + \gamma y u_y + \delta u &= f, & \delta, \gamma \text{ Konstante,} \\ u(x, y) &= 0 \text{ for } (x, y) \in \partial\Omega, \\ \Omega &:= \{ (x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1 \}, \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^2$  erfordern.

Für  $\delta = \gamma = 0$  erhalten wir das Modellproblem von Abschnitt 8.4. Wie dort approximieren wir das Problem (8.10.1) durch Diskretisierung: Wir wählen eine Schrittweite  $h = 1/(N + 1)$ , Gitterpunkte  $(x_i, y_j) := (ih, jh)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, N + 1$ , und ersetzen die Ableitungen  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$ ,  $u_x$ ,  $u_y$  in  $(x_i, y_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , durch zentrale Differenzen:

$$\begin{aligned} -u_{xx}(x_i, y_j) - u_{yy}(x_i, y_j) &\approx \frac{4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2}, \\ u_x(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad u_y(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}. \end{aligned}$$