

## Question 11

### Part A

$$\theta(x, y, z) := x^3 \cdot y^2 \cdot z^4$$

$$\text{Grad } \theta = \frac{\delta \cdot \theta}{\delta \cdot x} \cdot \underline{i} + \frac{\delta \cdot \theta}{\delta \cdot y} \cdot \underline{j} + \frac{\delta \cdot \theta}{\delta \cdot z} \cdot \underline{k}$$

$$\nabla_{x,y,z} \theta(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^4 \\ 2 \cdot x^3 \cdot y \cdot z^4 \\ 4 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^3 \end{pmatrix}$$

Let  $\underline{V}$  be  $\text{Grad } \theta$ .

$$\text{div } \underline{V} = \left( \frac{\delta \cdot \underline{i}}{\delta \cdot x} + \frac{\delta \cdot \underline{j}}{\delta \cdot y} + \frac{\delta \cdot \underline{k}}{\delta \cdot z} \right) \cdot \underline{V}$$

$$\underline{V} := 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^4 \cdot \underline{i} + 2 \cdot x^3 \cdot y \cdot z^4 \cdot \underline{j} + 4 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^3 \cdot \underline{k}$$

$$\text{div } \underline{V} = \left( \frac{\delta \cdot \underline{i}}{\delta \cdot x} + \frac{\delta \cdot \underline{j}}{\delta \cdot y} + \frac{\delta \cdot \underline{k}}{\delta \cdot z} \right) \cdot (3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^4 \cdot \underline{i} + 2 \cdot x^3 \cdot y \cdot z^4 \cdot \underline{j} + 4 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^3 \cdot \underline{k}) := 6 \cdot x \cdot y^2 \cdot z^4 + 2 \cdot x^3 \cdot z^4 + 12 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$$

$$\text{div grad } \theta = 6 \cdot x \cdot y^2 \cdot z^4 + 2 \cdot x^3 \cdot z^4 + 12 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$$

### Part B

$$\underline{A} := xz \cdot \underline{i} - 5 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot \underline{j} + xy^2 \cdot \underline{k}$$

The  $\text{div}$  operator is defined above.

$$\text{div } \underline{A}(x,y,z) = z - 10 \cdot y \cdot z^2$$

$$\text{div } \underline{A}(1,1,1) = 1 - 10 = -9$$

$\underline{A}$  is not solenoidal at  $(1,1,1)$

### Part C

$$\underline{B} := y \cdot \underline{i} - x \cdot \underline{j}$$

$$\text{curl} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\delta}{\delta \cdot x} & \frac{\delta}{\delta \cdot y} & \frac{\delta}{\delta \cdot z} \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

$$\text{curl } \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\delta}{\delta \cdot x} & \frac{\delta}{\delta \cdot y} & \frac{\delta}{\delta \cdot z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} := 0 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} - 2 \cdot \underline{k} = -2 \cdot \underline{k}$$

$\text{Curl } \underline{B}$  is not 0 therefore  $\underline{B}$  is rotational.